

Dagmar Högel
Franz Krischuns

Physik
für Medizinisch-technische Assistenten
der Radiologie und Labormedizin.
Unterlagen zum praktischen Unterricht



A 1. Fehlerrechnung

1.1. Grundlagen

Meßergebnisse können mit zwei prinzipiell unterschiedlichen Fehlern behaftet sein. Es kann sowohl die Richtigkeit als auch die Präzision einer Messung schlecht sein. Stellt man sich das richtige Meßergebnis als Zentrum einer Zielscheibe vor, kann man die folgenden vier Fälle voneinander unterscheiden:

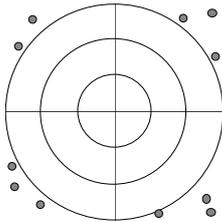


Abb. 1.1.: grobe Fehler

Präzision schlecht:
Die Treffer sind weit verstreut
Richtigkeit schlecht:
Die Treffer liegen weit vom Zentrum

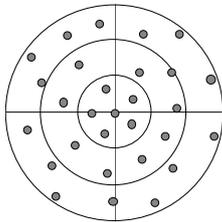


Abb. 1.2.: zufällige Fehler

Präzision schlecht:
Keine groben Fehler, die Treffer sind jedoch weit verstreut.
Richtigkeit gut:
Im Mittel liegen die Treffer gleichmäßig um das Zentrum verteilt.

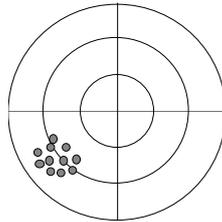


Abb. 1.3.: systematische Fehler

Präzision gut:
Alle Treffer liegen dicht beieinander.
Richtigkeit schlecht:
Obwohl alle Treffer dicht beieinander liegen, ist das Ziel verfehlt.

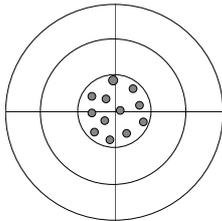


Abb. 1.4.: gutes Ergebnis

Präzision gut:
Alle Treffer liegen dicht beieinander.
Richtigkeit gut:
Alle Treffer liegen dicht um das Zentrum.

In den Abbildungen sind die Fehlerarten genannt, die zu schlechten Meßergebnissen führen können:

- systematische Fehler
- zufällige oder statistische Fehler

1.1.1. Systematische Fehler

Systematische Fehler werden durch die Meßvorrichtung bedingt. Wenn man eine Messung mit der gleichen Meßanordnung wiederholt, tritt der systematische Fehler bei jeder Messung in gleicher Weise auf. Er ist *reproduzierbar*.

- Beispiele:
- falsche Annahme über ein Meßprinzip
 - falsche Skaleneinteilung
 - Rückwirkung des Meßgerätes auf die Meßgröße

Systematische Fehler können nur durch Richtigkeitskontrollen entdeckt werden. Bei Laboruntersuchungen erfolgen diese Kontrollen dadurch, daß regelmäßig Proben mit bekannten Werten mituntersucht werden. Nur wenn die richtigen Ergebnisse ermittelt werden, können auch die Patientenwerte weitergegeben werden.

Systematische Fehler lassen sich durch sorgfältige Planung eines Meßsystems vermeiden oder verringern. Wenn man die Ursache eines nicht vermeidbaren systematischen Fehlers kennt, läßt er sich meistens rechnerisch berücksichtigen.

1.1.2. Statistische Fehler

Bei wiederholten Messungen kommt man bei ausreichend empfindlichen Meßinstrumenten nicht zu genau gleichen Meßergebnissen. Es treten zufällige oder statistische Fehler auf. Diese zufälligen Schwankungen sind *nicht reproduzierbar*. Mögliche Ursachen für statistische Fehler zeigen folgende Beispiele:

- Ablesefehler (Paralaxe, Schätzwerte)
- Reibung und Leerlauf bei Zeigerinstrumenten
- Störsignale und Rauschen bei digitalen Anzeigen

Der statistische Fehler ist ein Maß für Präzision oder Qualität einer Messung. Zur Präzisionskontrolle werden Kontrollproben eingesetzt, die regelmäßig gemeinsam mit Patientenproben bearbeitet werden. Die Streuung der Werte darf ein vorgegebenes Maß nicht übersteigen.

Statistische Fehler können aus den Einzelmessergebnissen berechnet werden. Man geht dabei von der Voraussetzung aus, daß Häufigkeitsverteilung der Meßwerte eine sog. Normalverteilung wie in der folgenden Abbildung ist.

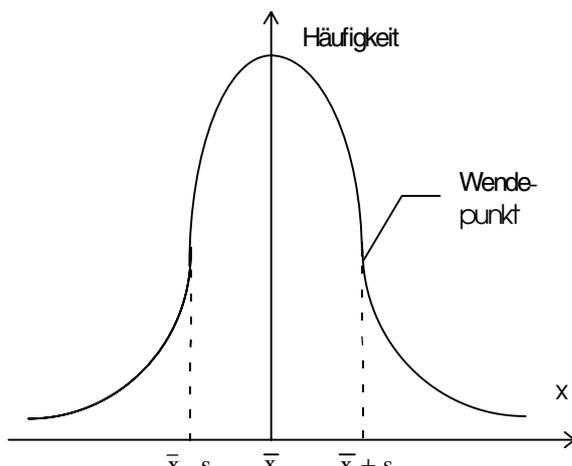


Abb. 1.5.:
Gauß'sche Normalverteilung

Der häufigste Wert ist der arithmetische Mittelwert aller Meßwerte. Er wird als bester Wert für den tatsächlichen Wert angenommen und gemäß

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

berechnet. Die Verteilung ist symmetrisch zum arithmetischen Mittelwert.

Der Abstand zwischen dem arithmetischen Mittelwert und dem Wendepunkt der Häufigkeitskurve ist die Standardabweichung der Verteilung. Sie wird nach folgender Formel berechnet:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Die Standardabweichung wird als Maß für den absoluten statistischen Fehler genommen. Im Intervall $\bar{x} \pm s$, das als Ergebnis der Messung angegeben wird, liegen ca. 68% aller Meßwerte, dementsprechend ist die Fläche unter der Häufigkeitsverteilung in diesem Intervall auch 68% der Gesamtfläche unter der Kurve. Deshalb ist

eine Häufigkeitsverteilung zum gleichen Mittelwert aber mit größerer Standardabweichung niedriger und breiter.

Als Maß für die Präzision einer Messung wird der prozentuale statistische Fehler der sogenannte Variationskoeffizient (VK) angegeben:

$$VK = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

1.2. Messungen

Messen Sie mit einer Mikrometerschraube $n=20$ mal die Dicke einer Holzplatte.

i	d_i [mm]		
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Berechnen Sie Mittelwert, Standardabweichung und Variationskoeffizient schrittweise.

Summe der Einzelwerte:

arithm. Mittelwert:

Summe d. Abweichungsquadrate:

Standardabweichung:

Variationskoeffizient:

Berechnen Sie zum Vergleich Mittelwert, Standardabweichung und Variationskoeffizient mit Hilfe der statistischen Funktionen des Taschenrechners.

arithm. Mittelwert: _____

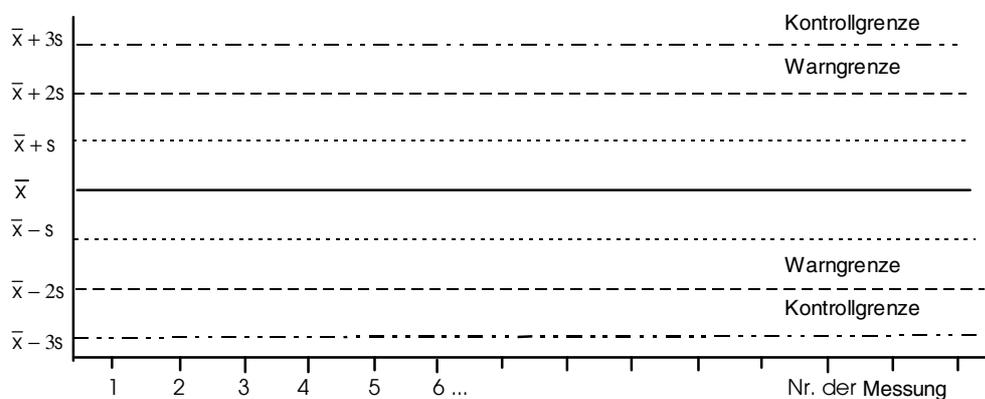
Standardabweichung: _____

Variationskoeffizient: _____

Stellenabschätzung: _____

Endergebnis: _____

Legen Sie auf Kästchen- oder Millimeterpapier eine Kontrollkarte nach folgendem Muster an: Setzen Sie für \bar{x} und s Ihre Werte ein und tragen Sie die Einzelmesswerte d_i in die Kontrollkarte ein.



1.3. Aufgaben und Fragen

- Ermitteln Sie die Häufigkeitsverteilung aller Meßwerte Ihrer Gruppe, indem Sie die Meßwerte den Intervallen der folgenden Tabelle zuordnen und eine Strichliste anlegen. Zeichnen Sie die Häufigkeitsverteilung.

d [mm]	13,00-13,04	13,05-13,09	13,10-13,14	13,15-13,19	13,20-13,24	13,25-13,29
Anzahl						
d [mm]	13,30-13,34	13,35-13,39	13,40-13,44	13,45-13,49	13,50-13,54	13,55-13,59
Anzahl						

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein Meßwert innerhalb der Warn- bzw. Kontrollgrenzen?

A 2. Dichtemessung

2.1. Grundlagen

2.1.1. Benötigte Größen

Masse

Die Masse m ist eine Grundgröße im SI-System mit der Einheit 1 kg. Die Masse ist eine Körpereigenschaft, die bei Geschwindigkeiten, die viel kleiner sind als Lichtgeschwindigkeit, unverändert bleibt.

Gewichtskraft

Die Gewichtskraft ist die Kraft, mit der eine Masse von einer anderen sehr großen Masse, z.B. der Erde, angezogen wird:

$$F_G = m \cdot g$$

Dabei ist g die jeweilige Gravitationsbeschleunigung, die ortsabhängig ist. Für die Erdbeschleunigung gilt:

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

Auftriebskraft

Eine Auftriebskraft F_A wirkt auf ganz oder teilweise in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper, und ist ihrer Gewichtskraft entgegengerichtet. Für den Betrag der Auftriebskraft gilt:

$$\text{Auftriebskraft} = \text{Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit}$$

Bei teilweise eingetauchten Körpern sind Auftriebskraft und Gewichtskraft im Gleichgewicht, d.h. betragsmäßig gleich.

Dichte oder spezifische Masse

Die Dichte ist die auf das Volumen eines Körpers bezogene Masse. Sie ist charakteristisch für den Stoff aus dem der Körper besteht:

$$\rho = m/V \qquad [\rho] = 1 \text{ kg/m}^3$$

2.1.2. Dichtebestimmung

Jede Dichtebestimmung beruht letztendlich auf einer Bestimmung von Masse und Volumen. Im Praktikum werden folgende Methoden durchgeführt:

Dichte regelmäßiger fester Körper

Der Körper wird ausgemessen und das Volumen entsprechend der geometrischen Form berechnet. Die Masse wird durch Wiegen bestimmt.

Dichte unregelmäßiger fester Körper

Das Volumen des Körpers wird bestimmt, indem der Körper vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht wird und das verdrängte Flüssigkeitsvolumen z.B. mit Hilfe eines Überlaufgefäßes und eines Meßzylinders gemessen wird. Die Masse des Körpers wird durch Wiegen bestimmt.

Dichtebestimmung von Flüssigkeiten mit dem Aräometer

Es gibt Aräometer unterschiedlicher Masse. Für die Dichtebestimmung muß ein Aräometer gewählt werden, das teilweise in die Flüssigkeit eintaucht, also schwimmt. In diesem Fall sind Auftriebs- und Gewichtskraft gleich groß und es gilt:

$$m_{\text{verdrängte Flüssigkeit}} = m_{\text{Aräometer}}$$

Das Volumen der verdrängten Flüssigkeit ergibt sich aus der Eintauchtiefe des Aräometers. Da Form und Masse des Aräometers bekannt sind, ist die Skala am Aräometer in Dichtewerte eingeteilt.

Dichtebestimmung von Flüssigkeiten mit dem Pyknometer

Die Methode soll im Praktikum erarbeitet werden.

2.2. Messungen

2.2.1. Dichte regelmäßiger fester Körper

Würfel mit dem Volumen $V=1\text{cm}^3$

Bestimmen Sie die Masse der Würfel, berechnen Sie die Dichte und suchen Sie die entsprechenden Materialien aus den ausliegenden Tabellen heraus.

Nr.	m []	ρ []	Material
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

2.2.2. Dichte unregelmäßiger fester Körper

Bestimmen Sie die Masse der in der Tabelle genannten unregelmäßigen Körper.

Messen Sie das Volumen mit Hilfe eines Überlaufgefäßes und eines Meßzylinders.

Berechnen Sie die Dichte ρ und suchen Sie aus den ausliegenden Tabellen das entsprechende Material heraus.

Körper	m []	V []	ρ []	Material
Stein 1				
Stein 2				
Schraube				
Lager				

2.2.3. Dichtebestimmung von Flüssigkeiten mit dem Aräometer

Bestimmen Sie die Dichte von Leitungswasser und Spiritus mit dem Aräometer.

Material	ρ []
H ₂ O	
Spiritus	