OTTO VON GUERICKE
UNIVERSITÄT
MAGDEBURG

MED

MEDIZINISCHE
FAKULTÄT

Skript zur Vorlesung

Physik für Mediziner

Vierte, überarbeitete Auflage 2010

Martin Böckmann-Barthel

Hellmut von Specht

1 Mathematische Grundlagen

Die Physik beschreibt Naturvorgänge in Form von Gesetzmäßigkeiten. Sie will experimentelle Befunde möglichst exakt erklären und die Ergebnisse noch nicht durchgeführter Experimente ebenso exakt vorhersagen. Dazu bedient sie sich der Sprache der Mathematik. Ohne diese ist keine wirkliche Physik möglich.

Bereits für das grundlegende Verständnis, das Medizinstudenten erwerben sollen, sind Begriffe wie Funktion, Ableitung, Integral, Vektor und Fehlergröße wesentlich. Im Folgenden sollen die mathematischen Schulkenntnisse in dieser Hinsicht aufgefrischt werden. Für das Verständnis der Vorlesung und die Durchführung des Praktikums *Physik für Mediziner* sind diese Begriffe unabdingbar.

1.1 Funktionen

1.1.1 Begriff der Funktion

Eine Funktion ordnet Elementen einer Menge bestimmte Elemente einer anderen Menge zu. y heißt eine Funktion von x, wenn jedem Wert einer **unabhängigen** Variable x (Argument) genau ein **abhängiger** Wert y zugeordnet wird.

$$\text{Allgemeine Schreibweise: } y = y(x) \tag{1.1}$$

Beispiele aus der Physik: elektrische Spannung als Funktion der Zeit: $U = U(t)$
Dampfdruck als Funktion der Temperatur: $p = p(T)$

Der **Definitionsbereich** einer Funktion $y = y(x)$ umfasst die Menge X aller Elemente x, denen ein Element y aus der Menge Y, dem **Wertebereich** der Funktion, zugeordnet wird.

Physikalische Gesetze werden im Allgemeinen für eine Größe als Funktionen eines, oft auch mehrerer Argumente formuliert:

- Gesetz des freien Falls: $h(t) = \frac{1}{2}g \cdot t^2$
- Harmonische Schwingung: $x(t) = A_o \sin(\omega \cdot t)$
- Zustandsgleichung idealer Gase: $p(V, n, T) = n \cdot R \cdot T \cdot \frac{1}{V}$

Darstellung: Gesetze werden durch Messen überprüft, indem eine unabhängige **Kontrollgröße** (x) verändert und der Wert der abhängigen **Messgröße** (y) festgestellt und in einer **Wertetabelle** notiert wird. Zur grafischen Darstellung einer Funktion in einem Diagramm werden die Funktionswerte y vertikal auf der **Ordinate** über den Werten der Variablen x auf der horizontalen **Abszisse** in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen. Jeder Punkt ist durch seine Koordinaten (x, y) gekennzeichnet.

Umkehrung einer Funktion: Existiert auch zu jedem Element des Wertebereichs genau ein Element des Definitionsbereichs, so lässt sich die Funktionsgleichung $y = y(x)$ nach x umstellen und in die Umkehrfunktion $x = x(y)$ überführen. Beispiele sind:

$$\begin{aligned} \text{Ausgangsfunktion} \quad y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0) \quad &\Rightarrow \quad \text{Umkehrfunktion} \quad x = \sqrt{2y} \\ \text{Ausgangsfunktion} \quad y = 10^x \quad &\Rightarrow \quad \text{Umkehrfunktion} \quad x = \log_{10} y \end{aligned}$$

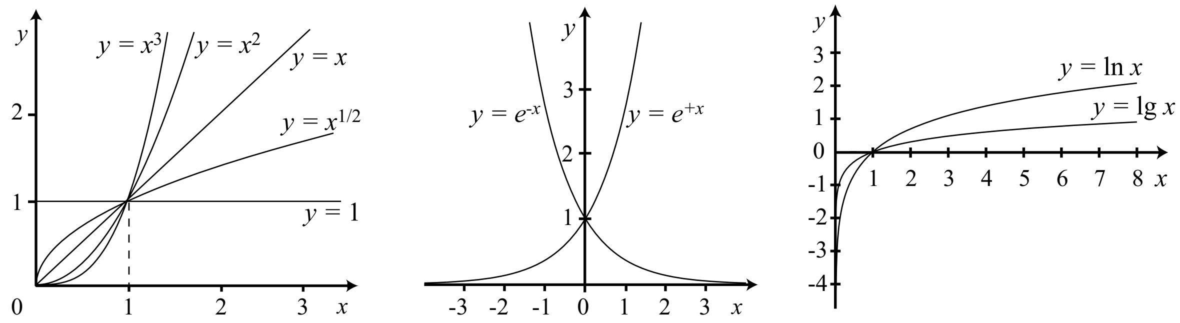


Abb. 1.1: Potenzfunktionen $y = x^n$ (links), Exponential- (Mitte) und Logarithmus-Funktionen (rechts)

1.1.2 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Potenzfunktionen bestehen aus Summen (oder Differenzen), die das Argument x in Potenz, also x^n, enthalten:

$$y = a + bx \; (= a \cdot x^o + b \cdot x^1) \qquad y = a + bx + cx^2 \qquad y = x^n$$

Potenzfunktionen sind auch:

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \text{(Wurzelfunktion)} \quad \text{und } y = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \text{(Hyperbelfunktion)}$$

$$\text{Es gilt die wichtige Beziehung:} \quad x^a \cdot x^b = x^{(a+b)} \tag{1.2}$$

Im Gegensatz dazu enthalten **Exponentialfunktionen** das Argument x im Exponenten zu einer Basis a. Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus zu der selben Basis:

$$\begin{array}{lccc} & y(x) = a^x & \text{z.B.:} \quad y = 10^x & y = Ae^x = A\exp(x) \\ \text{Umkehrfunktion:} & x = \log_a y & x = \log_{10} y = \lg y & x = \log_e \dfrac{y}{A} = \ln \dfrac{y}{A} \end{array}$$

Auch für Logarithmen gibt es wichtige Rechenregeln, die sich aus den Rechenregeln für Potenzen herleiten lassen:

$$\log_a (b \cdot c) \; = \; \log_a b + \log_a c \qquad \log_a \left(\frac{b}{c}\right) \; = \; \log_a b - \log_a c \tag{1.3}$$

$$\log_a 1 \; = \; 0; \qquad \log_a a \; = \; 1 \tag{1.4}$$

1.1.3 Trigonometrie und Winkelfunktionen

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Winkelfunktionen wie folgt definiert (Abb. 1.2):

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c} \qquad & \cos\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c} \\ \tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \qquad & \cot\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} \end{aligned} \tag{1.5}$$

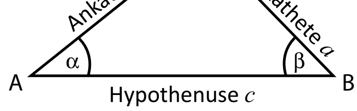
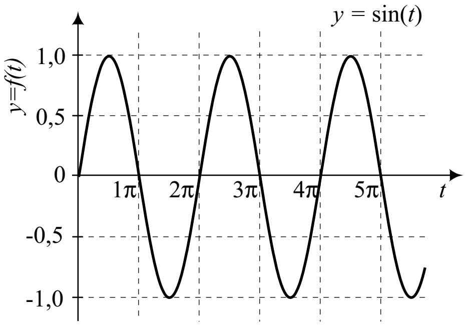


Abb. 1.2: Rechtwinkliges Dreieck

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{oder} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1.6}$$



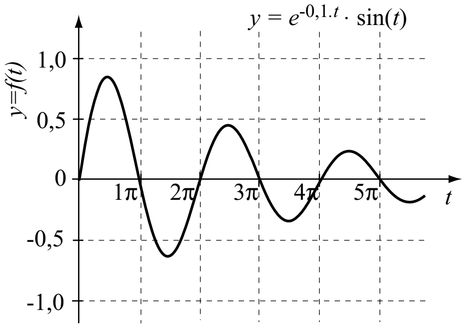


Abb. 1.3: Beispiele für harmonische (links) und gedämpfte Schwingungen (rechts)

Winkel werden gemessen in Grad (wobei ein voller Umlauf um einen Kreis 360° entspricht) oder in Bogenmaß (ohne Einheit!). Bei Letzterem beträgt ein voller Umlauf 2π.

Die **Sinus-** und die **Cosinusfunktion** ($y = \sin x$ und $y = \cos x$) sind periodisch: ihr Ablauf wiederholt sich exakt, wenn ihr Argument (der Winkel) um 2π (entsprechend 360°) zugenommen hat. Mit dem Argument der Zeit t, multipliziert mit der Kreisfrequenz ω, beschreiben sie in der Physik harmonische Schwingungen:

$$y(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

oder, multipliziert mit einer Exponentialfunktion, gedämpfte Schwingungen:

$$y(t) = y_o \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

1.2 Differentiation und Integration

1.2.1 Differentiation

Häufig interessiert in der Physik die Änderung einer Größe y in Abhängigkeit von einer anderen Größe x (am häufigsten der Zeit t). Diese lässt sich bestimmen durch die Differentiation der Funktion $y(x)$ nach x. Dazu bildet man den Grenzwert der Steigung einer Geraden durch einen Punkt auf der Kurve bei x_1 und einen weiteren, eng benachbarten bei $x_1 + \Delta x$ für $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)}{\Delta x} \tag{1.7}$$

Die **Ableitung** an der Stelle x bedeutet die Steigung einer Tangente an die Kurve im Punkt x, also die lokale Steigung der Funktion im Punkt x. (Abb.1.4a). $\frac{dy}{dx}$ ist dann die Funktion, die die Steigung von y in jedem Punkt x beschreibt. In der Physik hat sich diese Schreibweise für die Ableitung bewährt, weil man dann bei mehreren Argumenten weiß, nach welchem abgeleitet wird.

Man bestimmt die Steigung einer *Geraden* (auch im Praktikum) durch den Quotienten der Höhe Δy und Grundseite Δx eines Anstiegsdreiecks.

Potenzfunktionen lassen sich einfach ableiten:

$$y = c \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = n \cdot c \cdot x^{n-1} \tag{1.8}$$

Die Ableitungen anderer wichtiger Funktionen sind:

$$y = c \cdot e^{\pm g \cdot x} \qquad \frac{dy}{dx} = \pm g \cdot c \cdot e^{\pm g \cdot x} \tag{1.9}$$

$$y = c \cdot \ln x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{c}{x} \tag{1.10}$$

$$\tag{1.11}$$

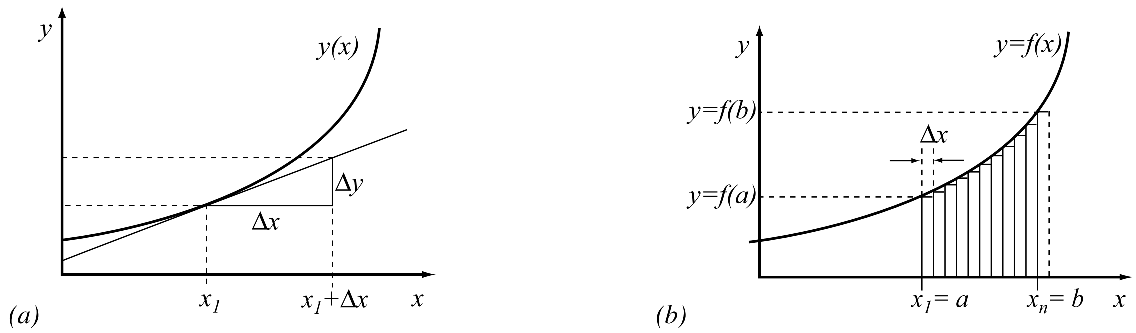


Abb. 1.4: (a) Definition der Ableitung als Steigung einer Kurve in einem Punkt (mit Anstiegsdreieck). (b) Definition des Integrals als Fläche unter einer Kurve

$$y = c \cdot \sin(\omega \cdot x) \qquad \frac{dy}{dx} = c \cdot \lambda \cdot \cos(\omega \cdot x) \tag{1.12}$$

$$y = c \cdot \cos(\omega \cdot x) \qquad \frac{dy}{dx} = -c \cdot \lambda \cdot \sin(\omega \cdot x) \tag{1.13}$$

$$\text{Zweite Ableitung des Cosinus:} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -c\,\omega^2 \cos(\omega \cdot x) \tag{1.14}$$

Beispiel aus der Physik: Die Geschwindigkeit v ist die Änderung des zurückgelegten Wegs s mit der Zeit t, also seine Ableitung. Die Beschleunigung a ist wiederum die Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit, mit der obigen Schreibweise:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

1.2.2 Integration

Das **Integral** einer Funktion $y(x)$ beschreibt die Fläche unter der Kurve. Zur Bestimmung denkt man sich die Fläche in schmale Streifen (Rechtecke) der Breite Δx unterteilt (Abb.1.4b). Die Fläche eines Streifens ist $y(x_i) \cdot \Delta x$. Das Integral von $x = a$ bis $x = b$ ist der Grenzwert der gesamten Fläche aller Streifen für die Streifenbreite $\Delta x \to 0$:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y(x_i) \cdot \Delta x \tag{1.15}$$

Unbestimmtes Integral: Die Funktion $Y(x) = \int y(x)$ heißt **Stammfunktion** oder unbestimmtes Integral; sie ist prinzipiell nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt. Mathematisch ist die Integration das Gegenteil der Ableitung: Für eine bekannte Funktion $y(x)$ ergibt die Ableitung von $Y(x) = \int y(x)$ nach x wieder $y(x)$.

Für die Potenzfunktion $y = x^n$ kann man durch Ableiten zeigen, dass das unbestimmte Integral diese Form hat:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C; \qquad z.B.: \quad \int x\,dx \ = \ \frac{1}{2}x^2 + C$$

Integrale anderer wichtiger Funktionen (Beweis durch Ableitung der Integralfunktion):

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

Beispiel aus der Physik: Arbeit ist das Integral der ausgeübten Kraft, um eine Masse zu bewegen, über den zurückgelegten Weg s. (Nur wenn die benötigte Kraft auf dem Weg überall gleich ist, wird daraus das bekannte einfache Gesetz $W = F \cdot s$.)

$$W = \int F(s)\, ds \tag{1.16}$$

1.3 Vektoren und Skalare

Skalare sind physikalische Größen, die durch Zahlenwert und Einheit eindeutig festgelegt sind und keine Richtung im Raum besitzen (Beispiele: Masse, Temperatur, Arbeit). Als **Vektoren** bezeichnet man gerichtete physikalische Größen, die zusätzlich der Angabe einer Raumrichtung bedürfen (Beispiele: Geschwindigkeit, Kraft, elektrische Feldstärke). Grafisch wird ein Vektor durch einen Pfeil dargestellt. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag des Vektors an; die Pfeilspitze weist in Richtung des Vektors. Vektoren sind frei verschiebbar, solange Länge und Richtung beibehalten werden. Vektoren lassen sich im zwei- oder dreidimensionalen Raum in zwei bzw. drei aufeinander senkrecht stehende Basisrichtungen (Komponenten) zerlegen (Abb. 1.5a):

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \qquad \tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{1.17}$$

α ist der Winkel des Vektors $\vec{v}$ gegen die x-Achse. Seine Größe (Zahlenwert · Einheit) ohne Richtungsinformation gibt der **Betrag** $|\vec{v}|$ (oder einfach v) an. Aus den Richtungskomponenten v_x und v_y erhält man den Betrag als:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \qquad \text{in drei Dimensionen: } v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.18}$$

1.3.1 Addition und Subtraktion, Streckung

Für die Addition zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ wird an das Ende des einen Vektors der Anfang des anderen Vektors gesetzt (Abb. 1.5b). Die Verbindung des Anfangspunktes des ersten mit dem Endpunkt des zweiten Vektors ergibt den Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$. Für die Subtraktion bildet man $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, kehrt also die Richtung von $\vec{b}$ um. (Eins und eins ist bei Vektoren nur dann zwei, wenn die Vektoren parallel sind - sonst ist die Summe kleiner!)

Die **Multiplikation** eines Vektors mit einem Skalar ($a \cdot \vec{v}$) ergibt eine Verlängerung des Vektors um diesen Faktor (Streckung oder, falls $a < 1$, Stauchung). Bei *negativem* a kehrt sich die Richtung des Vektors um!

Beispiel aus der Physik: Kräfte, die gleichzeitig in verschiedenen Richtungen an einem Körper angreifen, müssen vektoriell addiert werden. Umgekehrt lässt sich die Kraft auf einen Körper, der auf einer schrägen Fläche steht, in Anteile senkrecht und parallel zu dieser Fläche zerlegen (vgl. Abb. 3.5b)

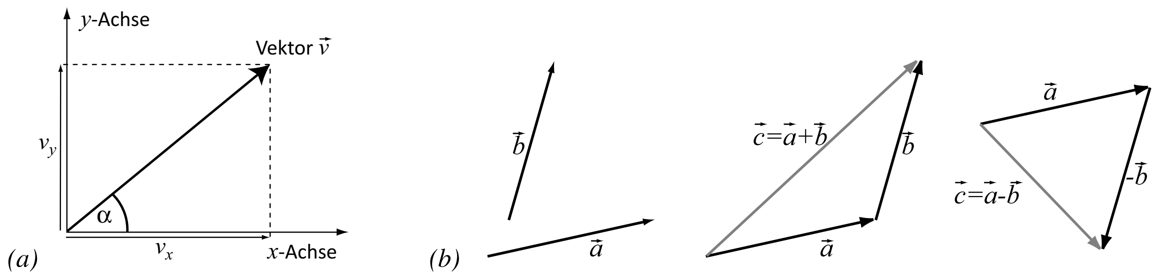


Abb. 1.5: (a) Zerlegung eines zweidimensionalen Vektors in seine Komponenten. (b) Addition (Mitte) und Subtraktion (rechts) von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Abb. 1.6: (a) Skalarprodukt und (b) Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

1.3.2 Multiplikation von Vektoren

Für die Multiplikation zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ existieren zwei Möglichkeiten mit physikalisch unterschiedlichen Bedeutungen.

Das Skalarprodukt (”inneres Produkt”, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine reelle Zahl (Skalar):

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \tag{1.19}$$

wobei $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Es entspricht dem Produkt des Betrages von $\vec{a}$ mit der Länge des auf die Richtung von $\vec{a}$ projizierten Vektors $\vec{b}$ (Abb 1.6a). Besonders einfach sind die Fälle, in denen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht oder parallel zu einander stehen:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90°) = 0 \tag{1.20}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(0°) = a \cdot b \tag{1.21}$$

Beispiel aus der Physik: Wird eine Bewegung durch eine Kraft $\vec{F}$ ausgeübt, die schräg zum zurückgelegten Weg $\vec{s}$ steht, so ist die verrichtete Arbeit W (kein Vektor!) als Skalarprodukt zu berechnen [1]:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \angle(\vec{F}, \vec{s})$$

Das Vektorprodukt (”äußeres Produkt”, ”Kreuzprodukt”) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ liefert als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Ausgangsvektoren aufgespannten Ebene steht. (Orientierung: Rechte-Hand-Regel). Der Betrag von $\vec{c}$ ist proportional zum Sinus des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b} \tag{1.22}$$

Beispiele aus der Physik:

- Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ($\vec{F}$: Kraft, $\vec{r}$: Hebelarm; beachte: das *Skalar*produkt von Kraft und Länge ergibt eine Arbeit!)
- Lorentz-Kraft: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ ($\vec{v}$: Geschwindigkeit, $\vec{B}$: magnetische Flussdichte, q: Ladung)

Kennzeichnung von Vektoren in diesem Skript: Prinzipiell müssten vektorielle Größen (z.B. Geschwindigkeiten, Kräfte) stets mit einem Pfeil gekennzeichnet werden. In dieser Vorlesung beeinträchtigt das jedoch die Übersichtlichkeit wesentlich, besonders da die Differentiation und Integration vektorieller Größen den hier vermittelten Stoff weit übersteigt. Daher werden Größen im Folgenden – im Wissen um die Inkonsequenz – nur dort als Vektoren gekennzeichnet, wo ihre vektorielle Natur zum Verständnis unabdingbar ist. Wenn ohnehin nur die Beträge von Interesse sind, werden hingegen die Pfeile weggelassen.

[1] Gemäß Gl. (1.16) ist *W* eigentlich ein Integral, es müsste mathematisch korrekt über einen Vektor integriert werden. Hier überschreitet die notwendige Mathematik den Rahmen der Vorlesung.

2 Grundlagen des Messens und Modellbildung in der Physik

2.1 Physikalische Größen und Einheiten

Eine Größe zu **messen**, bedeutet physikalisch, sie mit einer bekannten, reproduzierbaren Größe zu vergleichen. Eine physikalische Größe ist daher immer (bis auf wenige einheitenfreie Größen) das Produkt aus Zahlenwert und Maßeinheit. Die Maßzahl gibt an, wie oft die Einheit in der Größe enthalten ist.

$$\begin{aligned} \text{Physikalische Größe} &= \text{Maßzahl} \cdot \text{Maßeinheit} \qquad (2.1) \\ \text{z.B.:} \quad \text{Länge } l &= 5,86 \cdot \text{Meter} = 5,86\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

2.1.1 Basisgrößen

Jede physikalische Größe hat ihre vereinbarte Einheit. Das Internationale Einheitensystem (SI-System) hat 1954 sieben physikalische **Basisgrößen** mit ihren **Basiseinheiten** festgelegt (Tab. 2.1). Auf diese Basisgrößen können alle Größen zurückgeführt werden. Zur Beschreibung der Mechanik genügen die Basisgrößen Länge, Zeit und Masse. Die Einheiten sind wie folgt definiert:

- **Zeit**: 1 Sekunde: Dauer von 9 192 631 770 Schwingungen der Strahlung des ^{133}Cs-Nuklids beim Übergang zwischen zwei Hyperfeinstrukturniveaus (Messgenauigkeit 10^{-13}) (Atomuhr). Das gebräuchliche Frequenznormal ist ein Schwingquarz.
- **Länge**: 1 Meter. Bis 1960: Urmeter in Sèvres/Paris; jetzt definiert als $1/299\ 792\ 458$ der Strecke, die Licht im Vakuum in 1 s zurücklegt.
- **Masse**: 1 Kilogramm. Nach wie vor: Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

In der Wärmelehre tritt die Temperatur hinzu, in der Elektrizitätslehre die Stromstärke, dazu kommen noch Lichtstärke und Stoffmenge. Alle anderen Größen in der Physik lassen sich ableiten als Potenzprodukte der Basisgrößen in Tab. 2.1. Die wichtigen abgeleiteten Einheiten haben eigene Bezeichnungen erhalten (Tab. 2.2). Aus traditionellen und praktischen Gründen sind in der Medizin nach wie vor verschiedene SI-fremde Einheiten in Gebrauch, die nicht auf dieses System reduzierbar sind (Tab. 2.2, unten).

Tab. 2.1: Basisgrößen und Basiseinheiten der Physik im SI-System.

Basisgröße	*Symbol*	*Einheit*	*Abkürzung*
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I	Candela	cd
Stoffmenge	n	Mol	mol

Wichtige abgeleitete SI-Einheiten				
Größe	*Symbol*	*Einheit*	*Symbol*	*in (abgel.) SI-Einheiten*
Ebener Winkel	φ	Radiant	rad	$m \cdot m^{-1} = 1$
Raumwinkel	Ω	Steradiant	sr	$m^2 \cdot m^{-2} = 1$
Frequenz	f	Hertz	Hz	s^{-1}
Kraft	F	Newton	N	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Druck	p	Pascal	Pa	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	W, Q	Joule	J	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Drehmoment	M	Newtonmeter	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Leistung	P	Watt	W	$\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Stoffmengenkonzentration (Molarität)	c_n	Mol je Liter	$\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$	$\mathrm{mol} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
Molalität	c_m	Mol je kg		$\mathrm{mol} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$
El. Ladung	Q	Coulomb	C	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
El. Spannung	U	Volt	V	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$
Kapazität	C	Farad	F	$\mathrm{C} \cdot \mathrm{V}^{-1}$
Widerstand	R	Ohm	Ω	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}^{-1}$
Leitwert	G	Siemens	S	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{V}^{-1}$
Magn. Flussdichte	B	Tesla	T	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-2}$
Lichtstrom	Φ	Lumen	lm	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}$
Beleuchtungsstärke	E	Lux	lx	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr} \cdot \mathrm{m}^{-2}$
Aktivität	A	Becquerel	Bq	s^{-1}
Brechkraft	D	Dioptrie	dpt	$= \mathrm{m}^{-1}$
Energiedosis	D	Gray	Gy	$\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$

Einige SI-fremde Einheiten				
Größe	*Symbol*	*Einheit*	*Symbol*	
Länge	l	Ångström	Å	$= 10^{-10}$ m
Volumen	V	Liter	L, l	$= 10^{-3}$ m^3
Winkel	z.B. α	Grad	°	$= \pi/180$ rad
Zeit	t	Minute, Stunde, Tag, Jahr	min, h, d, a	
Temperatur	T	Grad Celsius	°C	$= T_C + 273{,}15$ K
Wärmemenge	Q	Kalorie	cal	$= 4{,}1868$ J
Blutdruck	p	mm Wassersäule	mmWS	$= 9{,}807$ Pa
		mm Quecksilbersäule	mmHg	$= 133{,}32$ Pa
Schalldruckpegel (logarithm. Verhältnisgröße)	$L = 20 \ \lg \left(\frac{p}{p_o} \right)$	Dezibel	dB	1

Tab. 2.2: Auswahl abgeleiteter Einheiten und einige, in der Medizin gebräuchliche SI-fremde Einheiten.

Teile			*Vielfache*		
Zehnerpotenz	*Vorsilbe*	*Präfix*	*Zehnerpotenz*	*Vorsilbe*	*Präfix*
$10^{-1} = 0,1$	Dezi	d	$10^{1} = 10$	Deka	da
$10^{-2} = 0,01$	Zenti	c	$10^{2} = 100$	Hekto	h
$10^{-3} = 0,001$	Milli	m	$10^{3} = 1000$	Kilo	k
10^{-6}	Mikro	μ	10^{6}	Mega	M
10^{-9}	Nano	n	10^{9}	Giga	G
10^{-12}	Pico	p	10^{12}	Tera	T
10^{-15}	Femto	f	10^{15}	Peta	P
10^{-18}	Atto	a	10^{18}	Exa	E

Tab. 2.3: Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

2.1.2 Maßzahlen

Große und kleine Zahlen werden in der Physik häufig als Produkt mit Potenzen von Zehn (z.B. $10^3 = 1000$, $10^{-4} = 0,0001$) formuliert. Diese Schreibweise erleichtert das Rechnen erheblich. Beispiele sind:

$$12000000 = 1,2 \cdot 10^7 \qquad 0,00003547 = 3,547 \cdot 10^{-5} \qquad 2 \cdot 10^7 \ \cdot\ 3 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^4$$

Zur Vereinfachung existieren Präfixe, die eine bestimmte Zehnerpotenz bezeichnen. So sind $1 \text{ nV} = 1 \cdot 10^{-9}$ V, $3 \text{ kPa} = 3 \cdot 10^3$ Pa. Die Bezeichnungen in Tab. 2.3 werden in der Folge als bekannt vorausgesetzt.

2.2 Messstatistik und Fehlerrechnung

Einige Sachverhalte in der Physik wie die molekulare Erklärung von Wärme und die Quantentheorie sind prinzipiell statistischer Natur. Doch auch andere Messprozesse sind unweigerlich Schwankungen unterworfen. Um den Zufall auszuschließen, erfolgt die Bestätigung einer wissenschaftlichen Hypothese durch wiederholte Messungen, die mit statistischen Methoden analysiert werden.

2.2.1 Arten von Messfehlern

Eine Messung soll den **wahren Wert** der untersuchten Größe ermitteln. Die Abweichung der Messung von diesem Wert bezeichnet man als Fehler. Jede Messung einer Stichprobe ist generell durch Fehler belastet, die sich in zwei Gruppen einteilen lassen:

Systematische Fehler äußern sich durch eine immer gleiche Abweichung vom tatsächlichen Wert. Grund können falsch abgelesene oder kalibrierte Messinstrumente sein, deuten häufig jedoch auf nicht berücksichtigte Effekte hin (wie Luftreibung, Wärmeverluste). Sie zeigen sich oft in einer Abweichung in einer bevorzugten Richtung und lassen sich *nicht* durch Wiederholung der Messung verringern. Sie sind prinzipiell vermeidbar, bedürfen aber mindestens der Erklärung durch den Experimentator.

Statistische Fehler äußern sich in zufälligen Schwankungen des Messergebnisses. Sie sind durch zufällige Einflüsse verursacht, prinzipiell unvermeidbar, und werden abgeschätzt durch Wiederholung der Messung

- an demselben Objekt oder
- an einer genügend großen Stichprobe vergleichbarer Objekte.

2.2.2 Fehlergrößen

Um die statistischen Fehler bei der wiederholten Messung einer Größe einschätzen zu können, muss man die Verteilung der Ergebnisse der einzelnen Messungen kennen. Zur Bestimmung der **Häufigkeitsverteilung** teilt man die Ergebnisskala in Intervalle und zählt, wie häufig ein Ergebnis in ein Intervall fällt. Bei einer (guten) physikalische Messungen sind Ergebnisse nah an wahren Wert der Größe am häufigsten; zu große und zu kleine Ergebnisse kommen mit gleicher Häufigkeit vor. Im Grenzfall unendlich kleiner Intervalle ist diese Situation beschrieben durch die **Normalverteilung** nach GAUSS der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}} \tag{2.2}$$

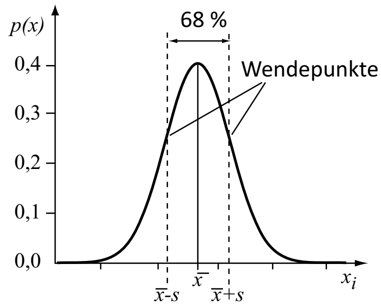


Abb. 2.1: Normalverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Normalverteilung hat die Form einer Glockenkurve (Abb. 2.1). Ihre Wendepunkte liegen bei $\bar{x} \pm s$; innerhalb dieses Bereichs liegen 68 % der Messergebnisse. Biologische oder medizinische Stichproben sind jedoch häufig nicht normalverteilt; häufig ist die Kurve nicht einmal symmetrisch.

Wenn die Messwerte einer Normalverteilung unterliegen, erhält man die beste Abschätzung des wahren Wertes aus dem arithmetischen Mittelwert. Aus n einzelnen Messungen $x_1, \ldots, x_n$ berechnet man ihn wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.3}$$

Um eine quantitative Angabe über die Sicherheit der Messung zu machen, benötigt man ein Streuungsmaß, etwa die **Varianz**, die mittlere quadrierte Abweichung der einzelnen Messung vom Mittelwert (links die Definition; die rechte Form ist einfacher, um eine Varianz von Hand auszurechnen):

$$s_x{}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{oder} \qquad = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) \tag{2.4}$$

Die **Standardabweichung** sagt voraus, dass ein weiterer Messwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% im Intervall $\bar{x} - s_x, \ldots, \bar{x} + s_x$ liegen wird. Dieses Intervall entspricht den Wendepunkten in Abb. 2.1. s_x ist die Quadratwurzel aus der Varianz:

$$s_x = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{2.5}$$

Beruhen die Messwerte auf einer mehrfachen Messung des *selben* Objekts, gibt man statt dessen den **Standardfehler** (Standardabweichung des Mittelwerts) $s_{\bar{x}}$ an. Statistisch liegt der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% im Intervall $\bar{x} - s_{\bar{x}}, \ldots, \bar{x} + s_{\bar{x}}$. Man erhält den Standardfehler durch Division der Standardabweichung durch die Wurzel aus der Anzahl der Messungen:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{2.6}$$

Der Standardfehler wird mit zunehmender Anzahl von Messungen geringer, die Standardabweichung bleibt jedoch in etwa gleich. Standardabweichung und Standardfehler sind nach diesen Definitionen absolute Größen (mit der selben Einheit wie der Mittelwert). Um die Fehlergröße im Verhältnis zur Messgröße deutlich zu machen, werden sie auch als **relative Fehler** in Prozent angegeben:

$$\text{rel. Standardabweichung:} \quad s_{x,rel} = 100\% \cdot \frac{s_x}{\bar{x}} \qquad \text{rel. Standardfehler:} \quad s_{\bar{x},rel} = 100\% \cdot \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \tag{2.7}$$